




**3.** Halle, si existen, los límites siguientes; demostrando al menos uno de esos límites que exista: (7.0 Puntos)

A) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{tan(x)sen(y)}{x^2+y^2}\right)$

C) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy^3}{x^2+y^6}\right)$

B) $\lim_{(x,y)\to(4,3)} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}\right)$

solució

SEGÚN MathosAI

C

Para determinar si el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy^3}{x^2+y^6}\right)$$

existe, evaluaremos el límite a lo largo de diferentes trayectorias que se acercan a $(0,0)$ .

**Trayectoria 1: $\mathbf{y=0}$**

Sustituyendo $y=0$ :

$$\frac{x(0)^3}{x^2+(0)^6} = \frac{0}{x^2} = 0$$

**Trayectoria 2: $\mathbf{x=0}$**

Sustituyendo $x=0$ :

$$\frac{(0)y^3}{(0)^2+y^6} = \frac{0}{y^6} = 0$$

**Trayectoria 3: $\mathbf{y=kx}$ (donde $\mathbf{k}$ es una constante)**

Sustituyendo $y=kx$ :

$$\frac{x(kx)^3}{x^2+(kx)^6} = \frac{xk^3x^3}{x^2+k^6x^6} = \frac{k^3x^4}{x^2+k^6x^6} = \frac{k^3x^4}{x^2(1+k^6x^4)}$$

Simplificando:

$$= \frac{k^3x^2}{1 + k^6x^4}$$

Cuando $x \to 0$ , esto tiende a:

$$\frac{k^3(0)^2}{1 + k^6(0)^4} = 0$$

### Trayectoria 4: $\mathbf{y = x^m}$ (donde $\mathbf{m}$ es un exponente positivo)

Sustituyendo $y = x^m$ :

$$\frac{x(x^m)^3}{x^2 + (x^m)^6} = \frac{x^{1+3m}}{x^2 + x^{6m}} = \frac{x^{1+3m}}{x^2(1 + x^{6m-2})}$$

Esto se simplifica a:

$$\frac{x^{1+3m-2}}{1 + x^{6m-2}} = \frac{x^{3m-1}}{1 + x^{6m-2}}$$

Dependiendo del valor de $m$ :

- Si $m > \frac{1}{3}$ , $3m - 1 > 0$ y el límite tiende a $0$ .
- Si $m = \frac{1}{3}$ , $3m - 1 = 0$ y el límite tiende a $1$ .
- Si $m < \frac{1}{3}$ , $3m - 1 < 0$ y el límite tiende a $0$ .

### Conclusión

Dado que el límite depende de la trayectoria elegida (por ejemplo, $m = \frac{1}{3}$ da un límite diferente), concluimos que el límite no existe.

$$\text{El límite no existe.}$$

***soluci*** SEGÚN

Para determinar si el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

existe, evaluamos el comportamiento de la función a lo largo de diferentes caminos:

### 1. Camino $x = 0$:

Si tomamos $x = 0$, la expresión se convierte en:

$$\frac{(0)y^3}{0^2+y^6} = \frac{0}{y^6} = 0.$$

### 2. Camino $y = 0$:

Si tomamos $y = 0$, la expresión se convierte en:

$$\frac{x(0)^3}{x^2+0^6} = \frac{0}{x^2} = 0.$$

### 3. Camino $x = y^3$:

Sustituyendo $x = y^3$, la expresión se transforma en:

$$\frac{(y^3)y^3}{(y^3)^2+y^6} = \frac{y^6}{y^6+y^6} = \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2}.$$

Como obtenemos distintos valores en diferentes caminos (0 en los primeros dos y $\frac{1}{2}$ en el tercero), el límite **no existe**.

**PREGUNTAS del BLOQUE B** **(8,0 PUNTOS)**

**4.** Dada la función f definida mediante $f(x,y) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

A) Halle PAR: $\frac{\partial f}{\partial x}$; IMPAR: $\frac{\partial f}{\partial y}$ indicando su dominio

B) Analice la Continuidad de PAR: $\frac{\partial f}{\partial y}$; IMPAR: $\frac{\partial f}{\partial x}$ en todo su dominio

solució

Para resolver el problema, procederemos paso a paso.

**Parte A: Cálculo de las derivadas parciales**

#### 1. Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}$

Para $(x, y) \neq (0,0)$ :

$$f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Calculamos la derivada parcial respecto a $x$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Para $(x,y) = (0,0)$ , la derivada parcial se puede calcular usando el límite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Por lo tanto, la derivada parcial es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Dominio de $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$** : $\mathbb{R}^2$ .

#### 2. Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}$

Para $(x,y) \neq (0,0)$ :

$$f(x,y) = x^2 \sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Calculamos la derivada parcial respecto a $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos\left(\frac{1}{y^2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{y^3}\right) = -\frac{2x^2}{y^3} \cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Para $(x, y) = (0, 0)$ , la derivada parcial se puede calcular usando el límite:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k} = 0$$

Por lo tanto, la derivada parcial es:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2x^2}{y^3} \cos\left(\frac{1}{y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Dominio de $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}$** : $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$ .

**Parte B: Análisis de la continuidad**

#### 1. Continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$

Para analizar la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2x^2}{y^3} \cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Tomamos el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$ :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} -\frac{2x^2}{y^3} \cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

El término $\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$ oscila entre -1 y 1, por lo que el límite depende de cómo se aproxima a $(0, 0)$ . Por ejemplo, si tomamos $y = kx$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, kx) = -\frac{2x^2}{(kx)^3} \cos\left(\frac{1}{(kx)^2}\right) = -\frac{2}{k^3} \frac{\cos\left(\frac{1}{(kx)^2}\right)}{x}$$

Este límite no existe, por lo que $\frac{\partial f}{\partial u}$ no es continua en $(0, 0)$ .

#### 2. Continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$

Para analizar la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Tomamos el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Dado que $\sin\left(\frac{1}{y^2}\right)$ está acotada entre -1 y 1, el límite es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \sin\left(\frac{1}{y^2}\right) = 0$$

Por lo tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$ .

**Resumen**

- $\mathbf{\frac{\partial f}{\partial x}}$ es continua en $(0,0)$ .
- $\mathbf{\frac{\partial f}{\partial y}}$ no es continua en $(0,0)$ .

B) Sea la función $u = f(x,y,z) = Ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Demuestre que satisface $\frac{\partial^2 Lnu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Lnu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Lnu}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}$

solució

Para demostrar que la función $u = f(x,y,z) = \text{Ln}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 \text{Ln}\, u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \text{Ln}\, u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \text{Ln}\, u}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2},$$

comenzamos calculando $u$ y luego sus derivadas parciales.

1. **Calcular $\mathbf{u}$** :

$$u = \text{Ln}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+y^2+z^2).$$

2. **Calcular $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$** :

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}.$$

3. **Calcular $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2}$** :

Ahora derivamos $\frac{\partial u}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Usamos la regla del cociente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

4. **Calcular $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2}$** y $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ **:**

**Siguiendo el mismo procedimiento:**

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} = \frac{\mathbf{x}^2+\mathbf{z}^2-\mathbf{y}^2}{(\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2)^2},$$

$$\mathbf{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.}$$

**5.** Sumar las derivadas parciales**:**
**Ahora sumamos las tres derivadas parciales:**

$$\mathbf{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{(y^2 + z^2 - x^2) + (x^2 + z^2 - y^2) + (x^2 + y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.}$$

**Simplificando el numerador:**

$$\mathbf{= \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

**6.** Calcular $u^2$ **:**
**Recordemos que:**

$$\mathbf{u = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}(x^2 + y^2 + z^2) \implies u^2 = \frac{1}{4} \mathrm{Ln}^2(x^2 + y^2 + z^2).}$$

**7.** Comparar con $\frac{1}{u^2}$ **:
Finalmente, tenemos que demostrar que:

$$\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{u^2}.$$

Dado que $u = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}(x^2 + y^2 + z^2)$ , podemos ver que:

$$u^2 = \frac{1}{4} \mathrm{Ln}^2(x^2 + y^2 + z^2) \implies \frac{1}{u^2} = \frac{4}{\mathrm{Ln}^2(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}.$$

Esto concluye la demostración.